

**COMPARAÇÃO DA APLICAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE  
UNIVARIADO E MULTIVARIADO PARA GESTÃO DA QUALIDADE EM  
UMA EMPRESA DE TRATAMENTO DE ÁGUA**

**COMPARATIVE OF THE APPLICATION OF UNIVARIATE AND  
MULTIVARIATE CONTROL CHARTS FOR QUALITY MANAGEMENT IN A  
WATER TREATMENT COMPANY**

Wiliam de Assis Silva\*  
Caroline Yumi Perpétuo Nishi\*\*  
Marcos Augusto Mendes Marques\*\*\*  
Fabiano Oscar Drozda\*\*\*\*  
Mariana Kleina\*\*\*\*\*

**RESUMO**

Este trabalho teve por objetivo comparar o gráfico de controle univariado  $\bar{x}$  com o gráfico de controle multivariado  $T^2$  de Hotelling em um conjunto de dados do final do processo de uma estação de tratamento de água do sul do Brasil. Uma pesquisa bibliográfica foi realizada para dar base ao trabalho, contendo histórico da qualidade, conhecimentos sobre análise multivariada, gráficos de controle, tratamento de água e pesquisa de trabalhos correlatos. Em seguida, foram selecionados indicadores de qualidade da água (cor aparente, turbidez, pH, cloro livre e fluoretos) e foram analisados utilizando-se as ferramentas de controle da qualidade com o auxílio do software Minitab. Durante a análise do gráfico  $\bar{x}$  foi identificado na cor aparente com uma variância nula o que levou a sua exclusão da aplicação do gráfico multivariado. Com exceção do gráfico  $\bar{x}$  para fluoretos, as ferramentas mostraram uma falta de controle do processo. A variação do processo mesmo fora de controle não ultrapassa a variação permitida pela empresa e pela regulamentação de potabilidade de água.

**Palavras-chave:** Controle estatístico do processo. Gráfico de controle.  $T^2$  de Hotelling. Tratamento de água.

**ABSTRACT**

The objective of this study was to compare the univariate control chart  $\bar{x}$  with the Hotelling  $T^2$  multivariate control chart in a data set at the end of the process of a water treatment plant in southern Brazil. A literature review was carried out to base the study, containing quality history, knowledge on multivariate analysis, control charts, water treatment and a research for related studies. After, quality indicators were selected (apparent color, turbidity, pH, free chlorine and fluorides) and they were analyzed using the quality control tools, with the help of Minitab software. During analysis of the control chart  $\bar{x}$ , it was identified in the apparent color a lack of variance, which led to its exclusion from the application of the multivariate tool. With the exception of the control chart  $\bar{x}$  for

---

\* Universidade Federal do Paraná (UFPR). [wiliamdeassis@gmail.com](mailto:wiliamdeassis@gmail.com)

\*\* Universidade Federal do Paraná (UFPR). [caroline.yumi.27@gmail.com](mailto:caroline.yumi.27@gmail.com)

\*\*\* Universidade Federal do Paraná (UFPR). [marquesammarcos@gmail.com](mailto:marquesammarcos@gmail.com)

\*\*\*\* Universidade Federal do Paraná (UFPR). [fabiano.drozda@gmail.com](mailto:fabiano.drozda@gmail.com)

\*\*\*\*\* Universidade Federal do Paraná (UFPR). [marianakleina11@gmail.com](mailto:marianakleina11@gmail.com)

fluorides, both tools showed a lack of control in the process. Even out of control, the variation of the process does not exceed the variation allowed by the company and the local regulation of water potability.

**Keywords:** Statistical process control. Control chart. Hotelling  $T^2$  control chart. Water treatment.

## **Introdução**

O controle estatístico dentro do processo produtivo traz grandes vantagens ao sistema, por prever irregularidades na produção, assim diminuindo custos devido a não conformidades, variabilidades anômalas do processo e retrabalhos (SAMOHYL, 2009).

A ferramenta da engenharia da qualidade que tem maior utilização na indústria pela sua facilidade de aplicação e de interpretação é o gráfico de controle, pois a partir do mesmo é possível fazer correções antes da parada do processo produtivo e reduzir o tempo de reatividade a mudanças de média ou de desvio padrão (SAMOHYL, 2009).

Segundo Montgomery (2009), os gráficos de controle são utilizados para monitorar a variabilidade de um processo e por meio deles é possível identificar mudanças no processo antes do problema se propagar até o produto final.

Basicamente existem dois tipos de gráficos de controle: os gráficos de controle para variáveis e os gráficos de controle para atributos. O primeiro deles é utilizado quando a característica a ser analisada é representada por uma variável aleatória quantitativa contínua. Já o gráfico de controle por atributo é utilizado quando a característica analisada não pode ser expressa numericamente; por exemplo, um item ser classificado como conforme ou não conforme.

Os gráficos de controle por variáveis ainda podem ser classificados como univariados ou multivariados. O gráfico de controle univariado analisa amostras de uma única característica do produto ou processo para identificar causas especiais. É usual o uso de gráficos em dupla, um gráfico para controlar a característica média e outro para a variação dessa mesma característica (SAMOHYL, 2009).

Com o gráfico de controle multivariado é possível fazer uma análise análoga a do univariado, porém com duas ou mais características analisadas simultaneamente utilizando-se apenas de um gráfico. Assim facilita-se o monitoramento e considera-se as relações existentes entre diferentes características da qualidade em um mesmo produto.

Por motivo de comparação de ferramentas foram escolhidos para este trabalho o gráfico de controle multivariado  $T^2$  de Hotelling e o gráfico univariado  $\bar{x}$  que, segundo

Montgomery (2009), são análogos por trabalharem com médias amostrais e utilizarem distribuição normal.

A partir deste entendimento, pode-se avaliar o tema aplicado a diversas atividades produtivas, por exemplo, a de tratamento de água para consumo. A água é um elemento essencial para o organismo humano, no entanto, comumente é encontrada com elementos químicos, substâncias e micro-organismos que podem prejudicar a saúde dos usuários, portanto devem ser eliminados ou reduzidos a concentrações que garantam a potabilidade da água. Para isso foram criadas as estações de tratamento de água, elas trabalham com um conjunto de processos e operações para a eliminação dos riscos presentes na água. São usados três conceitos na seleção do conjunto: múltiplas barreiras, tratamento integrado e tratamento por objetivos (DI BERNARDO; PAZ, 2008).

Assim, este trabalho tem como objetivo aplicar gráficos de controle univariados  $\bar{x}$  e compará-los a um gráfico de controle multivariado  $T^2$  de Hotelling, para o controle das características médias de amostras de água de uma empresa de tratamento de água do Brasil.

## **1 Fundamentação teórica**

Nesta seção são apresentadas as bases teóricas resultantes de pesquisas sobre os temas abordados para a execução do objetivo apresentado anteriormente. Isso inclui um breve histórico da qualidade, definições e principais conceitos da análise multivariada, de gráficos de controle, incluindo especificações sobre os gráficos  $\bar{x}$  e  $T^2$  de Hotelling, como também o resultado de pesquisa de trabalhos correlatos.

### **1.1 Histórico da qualidade**

O intuito da utilização de ferramentas da engenharia da qualidade e mais especificamente do gráfico de controle é o monitoramento da variabilidade de um processo. Um processo considerado de qualidade é uniforme em relação às características de manufatura de um produto, assim o monitoramento dessa uniformidade é de grande valia para manutenção da qualidade (SAMOHYL, 2009).

Há diversas definições de qualidade na literatura, uma delas é a de Garvin (1987) que define os oito componentes da qualidade como: desempenho, confiabilidade,

durabilidade, assistência técnica, estatística, características, qualidade percebida e conformidade com as especificações.

Outra definição seria a adequação ao uso de Juran (1993), ou seja, as características do produto são definidas de acordo com o usuário. Fernandes (2011) considera esse conceito moderno e diz que ele se torna o mais adequado para o consumidor, não necessariamente o melhor ou com maior valor de mercado.

A última definição apresentada por Montgomery (2009) é que a qualidade é inversamente proporcional à variabilidade. A redução da variabilidade proporciona custos menores o que gera menor necessidade de reparo e retrabalho, além de melhoria na qualidade percebida pelo cliente. Assim torna-se indispensável o monitoramento dessa variabilidade.

Há também a definição de Taguchi, citada por Ribeiro e Ten Caten (2012), em que a qualidade está ligada a atender as especificações, com menor variabilidade e no valor alvo.

A qualidade primeiramente era focada no produto, com inspeções e testes de produtos acabados e serviços. Após o começo da Segunda Guerra Mundial, o foco das empresas passa para o processo e começa o controle estatístico da qualidade com o uso da estatística para realizar inspeções e testes. A qualidade ainda evolui e se adapta aos novos padrões da indústria, primeiramente com o controle total da qualidade e outros conceitos que o seguem (FERNANDES, 2011).

De acordo com Samohyl (2009), as ferramentas do controle estatístico da qualidade estão presentes em todas as indústrias, mesmo que sejam mais simples. Ele também cita que a inspeção de todos os produtos, além de ter custos maiores, apresenta resultados que podem não ser confiáveis; uma vez que o inspetor pode se distrair e não visualizar os erros no lote ou o número de dados a serem avaliados pode ser tão grande que a análise não se torna viável. Samohyl (2009) ainda apresenta a necessidade de amostragem quando a inspeção do item pode levar a sua destruição.

Montgomery (2009) descreve as sete principais ferramentas do controle estatístico da qualidade como sendo: apresentação em histogramas ou ramo-e-folhas, folha de controle, gráfico de Pareto, diagrama causa-e-efeito, diagrama de concentração de defeito, diagrama de dispersão e gráfico de controle, sendo a última a mais tecnicamente desenvolvida e foco deste trabalho.

## **1.2 Análise multivariada**

Segundo Hair *et al.* (2009) há uma abundância de informações, porém elas não são processadas para gerar conhecimento. A análise multivariada faz esse trabalho ao analisar os dados disponíveis a fim de melhorar a estratégia a ser tomada.

Para ser considerada verdadeiramente multivariada, todas as variáveis devem ser aleatórias e inter-relacionadas de tal maneira que seus diferentes efeitos não podem ser significativamente interpretados em separado. Alguns autores estabelecem que o objetivo da análise multivariada é medir, explicar e prever o grau de relação entre variáveis estatísticas (combinações ponderadas de variáveis). Assim, o caráter multivariado reside nas múltiplas variáveis estatísticas (combinações múltiplas de variáveis), e não somente no número de variáveis e observações (HAIR *et al.*, 2009, p. 23).

Johnson e Winchern (2007) explicam que a análise multivariada possui intrinsecamente grande complexidade em sua compreensão por lidar com relações entre muitas variáveis, e, portanto, suas técnicas devem ser implementadas em sistemas computacionais.

Os objetivos das investigações científicas que melhor se ajustam aos métodos multivariados são: a redução de dados ou simplificação estrutural, a classificação e agrupamento, a investigação de dependência entre variáveis, a predição e a hipótese de construção e testes (JOHNSON; WINCHERN, 2007).

De acordo com Hair *et al.* (2009) as técnicas multivariadas muitas vezes são versões adaptadas das usadas em casos univariados e bivariados.

## **1.3 Gráficos de controle**

O gráfico de controle é uma das sete ferramentas do controle estatístico do processo, ele foi desenvolvido na década de 20 do século XX pelo Dr. Walter A. Shewhart (MONGOMERY, 2009).

Samohyl (2009) descreve os gráficos de controle como elementos visuais que possibilitam a rápida identificação de alterações no processo, devido a causas especiais. Eles são caracterizados por séries temporais com amostragens regulares e produzem melhora na qualidade a custo reduzido.

Montgomery (2009) discorre sobre a existência de uma variabilidade natural intrínseca ao processo, isto é, não é possível eliminá-la e ela independe do planejamento

e manutenção. A variabilidade quando muito maior que a natural é identificada devido a causas atribuíveis, elas identificam um processo fora de controle e podem causar deslocamento da média, mudanças no desvio padrão ou ambos.

Montgomery (2009) apresenta três tipos de variabilidade do processo, sendo elas comportamento estacionário, em que o processo está sob controle e os dados variam em torno de uma média fixa de maneira estável e previsível sem correlação entre os dados; estacionário autocorrelacionado, onde as observações são correlacionadas e tendem a formar sequências longas em torno da média; e não-estacionária, em que o processo é muito instável e a média não pode ser fixada e o processo não se estabiliza.

Nesse trabalho serão utilizados os gráficos de controle  $\bar{x}$  (univariado) e  $T^2$  de Hotelling (multivariado), ambos utilizando variáveis contínuas.

Os erros dos gráficos de controle podem ser do tipo I ou tipo II. O tipo I é também chamado de alarme falso e ocorre quando o processo está dentro de controle, mas há um alerta no gráfico que identifica uma causa especial. Já o tipo II é a falha da ferramenta em identificar uma causa especial (MONTGOMERY, 2009).

### **1.3.1 Gráfico de controle univariado para variáveis $\bar{x}$**

O gráfico de controle univariado  $\bar{x}$  é composto por limites de controle (inferior e superior) e uma linha central contendo a média das variáveis sob controle ou o valor alvo. Além disso as amostras, médias das medidas da variável, são plotadas em forma de histograma e espera-se que estejam entre os limites (SAMOHYL, 2009).

Montgomery (2009) define os limites de controle como sendo mais utilizados com distância de três desvio-padrão da linha central, o que causa a probabilidade de um erro tipo I ocorrer de 0,27% ou uma vez em cada 370. Sendo assim, o Limite Superior de Controle (LSC) e o Limite Inferior de Controle (LIC) são calculados pelas seguintes equações:

$$LIC = \bar{x} - 3\sigma \quad (1)$$

$$LSC = \bar{x} + 3\sigma \quad (2)$$

Onde  $\bar{x}$  é a média dos dados do processo sob controle e  $\sigma$  é o desvio-padrão sob controle.

Montgomery (2009) comenta que o tamanho das amostras pode influenciar na detecção de mudanças. Amostras maiores facilitam a detecção de pequenas mudanças, mas isso pode aumentar os custos da empresa. O ideal seriam grandes amostras muito

frequentes, porém isso não é viável economicamente. O que é feito na prática são pequenas amostras com mais frequência. Samohyl (2009) define os tamanhos das amostras como sendo em geral menores do que nove.

A utilização de amostras se dá ao uso da distribuição normal para os gráficos de controle. Como não se pode garantir que todas as variáveis analisadas seguem a distribuição normal é utilizado o teorema do limite central, ele define que a soma de  $n$  variáveis independentes sempre se adequa a distribuição normal, logo as médias também a seguem (RIBEIRO; TEN CATEN, 2012).

### **1.3.2 Gráfico de controle multivariado ( $T^2$ de Hotelling)**

Segundo Johnson e Winchern (2007) o gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling é formado pela série histórica dos dados e por um limite superior (LSC), não apresentando limite inferior ou a linha central. Ainda assim, de acordo com Montgomery (2009) ele apresenta uma análise análoga ao gráfico univariado já apresentado.

Montgomery (2009) descreve os gráficos multivariados como tendo melhores resultados ao trabalhar de 2 a 10 características do mesmo processo ou produto, caso esse número seja ultrapassado é indicado o uso de componentes principais. O gráfico de controle multivariado se utiliza da distribuição normal multivariada.

Há duas versões do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling, uma para dados subagrupados e outra para amostras individuais. Cada uma dessas versões é dividida em fase 1 e fase 2, sendo a primeira para estabelecer o controle do processo e a segunda para monitoramento. A versão para dados subagrupados segue as seguintes equações:

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})'S^{-1}(\bar{x} - \bar{\bar{x}}) \quad (3)$$

Para fase 1:

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (4)$$

E para a fase 2:

$$LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \quad (5)$$

Já para observações individuais as equações são:

$$T^2 = (x - \bar{x})'S^{-1}(x - \bar{x}) \quad (6)$$

Fase 1:

$$LSC = \frac{(m - 1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (7)$$

Fase 2:

$$LSC = \frac{p(m + 1)(n - 1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p} \quad (8)$$

Sendo:

$\bar{x}$ : o vetor média amostral;

$\bar{\bar{x}}$ : o vetor média populacional estimado;

S: a matriz de covariância média amostral;

n: o tamanho da amostra;

p: o número de características a serem avaliadas;

F: valor estatístico tabelado;

$\alpha$ : nível de significância;

m: o número de amostras disponíveis.

#### **1.4 Processo de tratamento de água**

A água encontrada na natureza está sujeita a diversas impurezas tanto físicas como biológicas que podem fazer mal ao consumidor ou torná-la inviável para utilizações específicas. Howe *et al.* (2016) discorre sobre a importância do tratamento da água para controle de transmissões de doenças.

A água absolutamente pura não existe na natureza, e para consumo humano, é necessário que ela seja potável, isto é, segura (livre de contaminantes orgânicos e inorgânicos e de bactérias patogênicas), atraente de aspecto e de sabor agradável para ser bebida, e adequada para finalidades domésticas e para a maior parte das atividades industriais. Além disso, o público deseja uma água de dureza não elevada e estável, quer dizer, nem corrosiva nem incrustante.” (RICHTER, 2009, p. 66).

O tratamento convencional da água geralmente é construído de acordo com a composição da água da fonte, sendo que cada conjunto de fatores contaminantes



necessitam de um ou mais processos para sua remoção, mas cabe lembrar que nenhum dos processos sozinhos é suficiente para a purificação da água (HOWE *et al.*, 2016).

Segundo Richter (2009) uma Estação de Tratamento de Água (ETA) convencional é composta dos seguintes processos:

- a) Coagulação: mistura da água bruta com produtos químicos que provocam a precipitação e desestabilização de partículas sólidas;
- b) Floculação: processo que segue a coagulação onde as partículas desestabilizadas se chocam para formar outras maiores a serem removidas nos processos seguintes;
- c) Decantação: separa partículas sólidas em suspensão na água por meio de forças gravitacionais;
- d) Filtração: passagem da água por meio poroso para separação de impurezas;
- e) Desinfecção: destruição parcial de organismos patogênicos que não podem ser removidos por processos físico-químicos, muitas vezes é utilizado o cloro, principalmente os cloros livres.

Di Bernardo e Dantas (2005) apontam que o tratamento de água inadequado pode prejudicar a qualidade e a expectativa de vida dos usuários, eles apresentam a grande ligação entre internações hospitalares e a falta de qualidade e disponibilidade de água potável no Brasil.

#### **1.4.1 Indicadores de qualidade da água**

Para a garantia da potabilidade da água para uso e consumo são necessárias análises e acompanhamento de alguns parâmetros que são constantemente revisados, esses indicadores são capazes de garantir uma eliminação de matérias orgânicas e inorgânicas que podem estar presentes na água e podem prejudicar tanto os usuários quanto a infraestrutura do sistema de distribuição, além da possibilidade de denegrir a qualidade da água entre a saída da ETA e o local de consumo (RICHTER, 2009). Abaixo são descritos alguns desses indicadores utilizados pela empresa que concedeu os dados no controle de qualidade da ETA, segundo Di Bernardo e Dantas (2005) cada um desses parâmetros deve ter no mínimo uma amostragem a cada duas horas:

a) Cor: A água recebe a sua coloração por meio da absorção de certas radiações do espectro visível, o que geralmente é um indicativo da presença de substâncias de origem mineral e orgânicas dissolvidas, podendo estar no estado coloidal ou em suspensão (RICHTER, 2009). Di Bernardo e Dantas (2005) definem a origem da cor dos corpos d'água como sendo a presença de substância húmica, matérias orgânicas provenientes da decomposição de plantas e animais.

Segundo Richter (2009) a coloração da água a princípio não era um indicativo de poluição, sendo seu tratamento mais estético, porém com o aumento do uso de produtos químicos ela se tornou um possível indicativo de poluição.

A cor da água é denominada verdadeira quando não apresenta partículas suspensas, após centrifugação ou filtração, caso a água contenha essas partículas ela é denominada verdadeira (DI BERNARDO; PAZ, 2008). Para a medição da cor é utilizada a comparação visual ou espectrofotometria (DI BERNARDO; PAZ, 2008), sendo utilizadas as unidades mg/L de Pt-Co ou graus Hazen, °H, a Organização Mundial da Saúde (OMS) indica um valor máximo recomendado de 5°H e valor máximo permissível de 15°H (RICHTER, 2009);

b) Turbidez: Richter (2009) apresenta a turbidez como um efeito ótico de dispersão de luz decorrente de partículas suspensas na água, dentre essas partículas podem estar areia, argila, matéria orgânica, silte, partículas coloidais, plâncton, partes de esgoto, bactérias, algas, outros micro-organismos e pequenas bolhas de ar. Diferentes composições dessas partículas podem gerar o mesmo valor de turbidez, mas requerem métodos de tratamento distintos, podendo alterar a coagulação (DI BERNARDO; DANTAS, 2005). A turbidez é um indicativo de partículas suspensas de fácil aplicação e baixo custo em comparação com um contador de partículas que teria a mesma função (DI BERNARDO; PAZ, 2008). Ela é medida em unidades nefelométricas de turbidez (UNT), a OMS recomenda valores abaixo de 1 UNT e máximo permissível de 5 UNT, outro fator é que a baixa turbulência é essencial para a desinfecção da água, em especial na inativação de vírus (RICHTER, 2009);

c) Fluoretos: Segundo Di Bernardo e Paz (2008) os fluoretos são normalmente encontrados em corpos d'água, a presença de flúor é exigida por lei no Brasil, apesar de em concentrações maiores que 3,0 mg/L poderem afetar a estrutura dos ossos e dentes. Richter (2009) aponta valores máximos permissíveis pela OMS como sendo entre 0,6 e 1,7 mg/L;

d) PH: Richter (2009) apresenta o pH como uma expressão da acidez de uma solução, sendo importante em todas as etapas de tratamento de água por poder afetar a eficácia do mesmo. A escala varia de 0 a 14, sendo que as soluções mais ácidas são expressas por valores mais baixos, as neutras próximas a 7 e as mais básicas com valores mais altos. Di Bernardo e Paz (2008) apontam que apesar de serem encontrados apenas em casos de grave contaminação, quando usuários em contato com valores de pH abaixo de 4 ou acima de 11 eles podem sofrer irritação nos olhos, na pele e nas mucosas. Além disso, pode afetar a ação do cloro como desinfetante, corroer os canos liberando metais na água quando os valores ácidos ou caso a água esteja muito alcalina pode ocorrer a tendência de formar incrustações. A OMS recomenda valores entre 7 e 8,5 e aponta como máximos permissíveis entre 6,5 e 9,2 (RICHTER, 2009);

e) Cloros livres: Os cloros livres são utilizados como desinfetantes para remoção de micro-organismos e bactérias (DI BERNARDO; PAZ, 2008). Howe (2016) aponta o início do século XX como o começo da utilização contínua desse elemento, aponta ainda riscos de reações do cloro com o material orgânico natural da água, podendo gerar produtos como clorofórmio, ressaltando assim a importância de um bom balanceamento entre a desinfecção da água e a formação de subprodutos. Richter (2009), por sua vez, descreve a importância da eliminação de bactérias que por serem capazes de extrair ferro, causam oxidação e deposição de matéria nas tubulações, o que forma um biofilme causador de diminuição de capacidade da tubulação, sabor e odor desagradáveis, sujeira e corrosão. A solução apontada seria a aplicação de cloro livre com residual de 1 a 5 mg/L.

## **1.5 Trabalhos Correlatos**

Para melhor entendimento do trabalho e contextualização do tema foi realizada uma pesquisa sobre trabalhos correlatos. Para isto foi realizada uma pesquisa no Scopus da Capes por artigos e teses com aplicações de gráfico de controle multivariado utilizando o  $T^2$  de Hotelling. Com base nas pesquisas sobre o tema foram selecionadas as seguintes palavras-chave para a pesquisa “Gráfico de controle”, “carta de controle” e “gráfico  $t_2$  de Hotelling”. Os detalhes da pesquisa estão representados no Quadro 1 e o Quadro 2 apresenta um resumo dos trabalhos selecionados.

Quadro 1 – Método de pesquisa de trabalhos correlatos

Data	Base de dados	Palavras-chave	Filtros
28/04/2018	Scopus Capes	“Gráfico de controle” ou “Carta de controle”	Data (2010-2018) Português
Resultado = 1.822 artigos			
Filtros	“Gráfico t2 de Hotelling”		
Resultado = 4 artigos e 2 teses			

Fonte: Os Autores (2019)

Quadro 2 – Artigos com utilização de gráficos de controle T<sup>2</sup> de Hotelling

#	Título	Autores	Ideias principais
1	Detecção de mudança de nível em séries temporais não lineares usando Descritores de Hjorth	AMORIM <i>et al.</i> (2015)	Aplicação do gráfico de controle T2 de Hotelling para monitoramento dos Descritores de Hjorth de atividade, mobilidade e complexidade em dados reais e simulados com resultados positivos na identificação de mudanças
2	Aplicações do controle estatístico multivariado da qualidade controlando garrafeiras plásticas numa empresa industrial	LIMA <i>et al.</i> (2012)	Utilização do gráfico de controle T2 de Hotelling com componentes principais e adaptando a matriz de covariância para variância entre observações aplicado em garrafeiras plásticas.
3	Cartas de controle multivariadas: Estudo de caso em vinícolas italianas	MACIEL; BRANCO; WERNER (2014)	Comparação dos gráficos de controle univariado de Shewhart e multivariado T2 de Hotelling em 3 classes diferentes da produção de vinhos. Consideraram variáveis com alta correlação e identificaram vantagens no uso do multivariado pela redução do número de alarmes falsos
4	Análise multivariada para o controle da qualidade microbiológica do leite cru	ZANITT; OLIVEIRA (2015)	Aplicação do gráfico multivariado T2 de Hotelling e estatística de T em 2 características do leite antes de processamento
5	Obtenção de limites estatísticos de controle em gráficos de controle univariados e multivariados aplicados a dados de instrumentação de barragens	LAZZAROTTO (2016)	Aplicação de gráficos de controle univariados e multivariados em instrumentos de monitoramento da barragem de uma hidrelétrica. Utilização de métodos estatísticos, redes neurais, decomposição de Wavelet, Gráfico T2 de Hotelling entre outros. Aplicação de combinações híbridas entre gráficos de controle univariados e multivariados
6	Avaliação da efetividade de cartas de controle multivariadas na detecção de suspeitas de fraude financeira	SOUZA (2017)	Aplicação de carta de controle multivariada para detectar suspeitas de fraude financeira, utiliza dados simulados e a lei de Benford como base. Aplica além do gráfico de T2 de Hotelling o X <sup>2</sup>

Fonte: Os Autores (2019)

Pela pesquisa realizada foi possível observar a utilização da ferramenta de gráfico de controle T<sup>2</sup> de Hotelling em diversos ramos da indústria, com aplicações em diferentes

etapas de processos produtivos. As análises foram realizadas tanto em dados reais, quanto simulados e obtiveram em geral resultados positivos na sua utilização. Outro fator interessante foi a aplicação conjunta com outras ferramentas e diferentes conceitos como a lei de Benford e métodos estatísticos.

## **2 Materiais e métodos**

Nessa seção serão apresentados o contexto do estudo de caso e os procedimentos utilizados para a aplicação das ferramentas de controle univariada  $\bar{x}$  e multivariada gráfico  $T^2$  de Hotelling.

### **2.1 Descrição do estudo de caso**

O caso analisado utilizou-se de dados concedidos por uma empresa de tratamento de água brasileira (concessionária de abastecimento) por um período de dois meses, entre maio e junho de 2016. O contato com a empresa foi através do departamento de qualidade que repassou os dados do processo de uma ETA. Nela são coletados vários dados em diferentes etapas do processo, desde a água em natura até a água tratada, cada parâmetro com periodicidades diferentes.

Para a aplicação das ferramentas foram escolhidos os indicadores da etapa final do processo, por terem uma amostragem de hora em hora para a maioria dos fatores e pelo fato da água em natura sofrer alterações na sua composição de acordo com diversos fatores externos, como a quantidade de chuvas.

Os cinco fatores de qualidade selecionados foram: turbidez, cor aparente, cloro livre, fluoretos e pH, que na organização foram coletados de hora em hora, mas no caso da cor aparente a cada duas horas, alguns desses períodos não possuem dados devido a paradas na ETA. A empresa estabeleceu os limites de padrões de qualidade para cada um dos indicadores selecionados demonstrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Limites da organização para os indicadores analisados

	<b>PH</b>	<b>Turbidez</b>	<b>Cor Aparente</b>	<b>Cloro Livre</b>	<b>Fluoretos</b>
<b>Máximo</b>	9	1	5	2,5	1,1
<b>Mínimo</b>	6	-	-	0,6	0,6

**Fonte:** Empresa do estudo de caso (2019)

Primeiro foram aplicados os gráficos univariados para cada uma das características dentro do software Minitab e depois na mesma plataforma o gráfico multivariado. Para essa aplicação foram retiradas as observações com dados não captados. Segundo Montgomery (2009) para a aplicação do inicial do gráfico univariado selecionado são necessários de 20 a 25 subgrupos para a definição dos limites de controle e média. Os subgrupos foram formados com 6 observações, sendo assim selecionadas as últimas 150 observações para análise.

Durante a aplicação do gráfico  $\bar{x}$  foi constatado que o indicador de cor aparente apresentava variância nula, logo a ferramenta estatística não se torna adequada para a sua análise e foi então decidida pela exclusão da variável na aplicação do gráfico  $T^2$  de Hotelling. Após essa conclusão, os dados de turbidez, pH, cloro livre e fluoretos foram manipulados no Minitab para a formação do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling. Os gráficos e análises de resultados são apresentados na seção 4.

### **3 Resultados e discussão**

Esta seção tem por finalidade apresentar os resultados encontrados após a aplicação das ferramentas sobre a base de dados obtida da ETA bem como a interpretação dos resultados.

#### **3.1 Gráficos de Controle Univariados para médias**

Nos itens a seguir serão apresentados os resultados referentes aos gráficos de controle univariados e suas respectivas interpretações. De acordo com os gráficos gerados, a maioria das variáveis indica a falta de controle do processo, apesar de todos os valores estarem dentro dos limites impostos pela organização. Na característica de cor aparente foi encontrada uma falta de variabilidade que torna a ferramenta utilizada irrelevante para a sua interpretação, enquanto a variável de fluoretos se encontra dentro do processo.

##### **3.1.1 Cor aparente**

A Figura 1 mostra o gráfico gerado para as observações de cor aparente. Pode-se observar que a amostra 16 está acima do limite superior de controle, a amostra 15 se

encontra próxima do mesmo e todos os outros pontos apresentam o valor constante de 2,5 H°. Montgomery (2009) apresenta alguns alertas de mudanças de processo durante a análise dos gráficos univariados, sendo uma delas a presença de oito ou mais amostras consecutivas do mesmo lado da média, mesmo que dentro dos limites de controle. Nos dados originais observa-se a presença da maioria das observações sendo 2,5 H° e esporadicamente a presença de medidas 5 H°. Essa variável apresenta uma escala de medição com uma resolução inadequada para demonstrar pequenas variabilidades no processo, dando uma aparência de constância. Esta falta de variabilidade, ruído branco, apresentada nos dados e no gráfico descaracteriza a utilização da ferramenta. Apesar dessa ferramenta não ser adequada para a sua análise, as observações se encontram todas de acordo com os limites adotados pela empresa, não superando 5 H°.

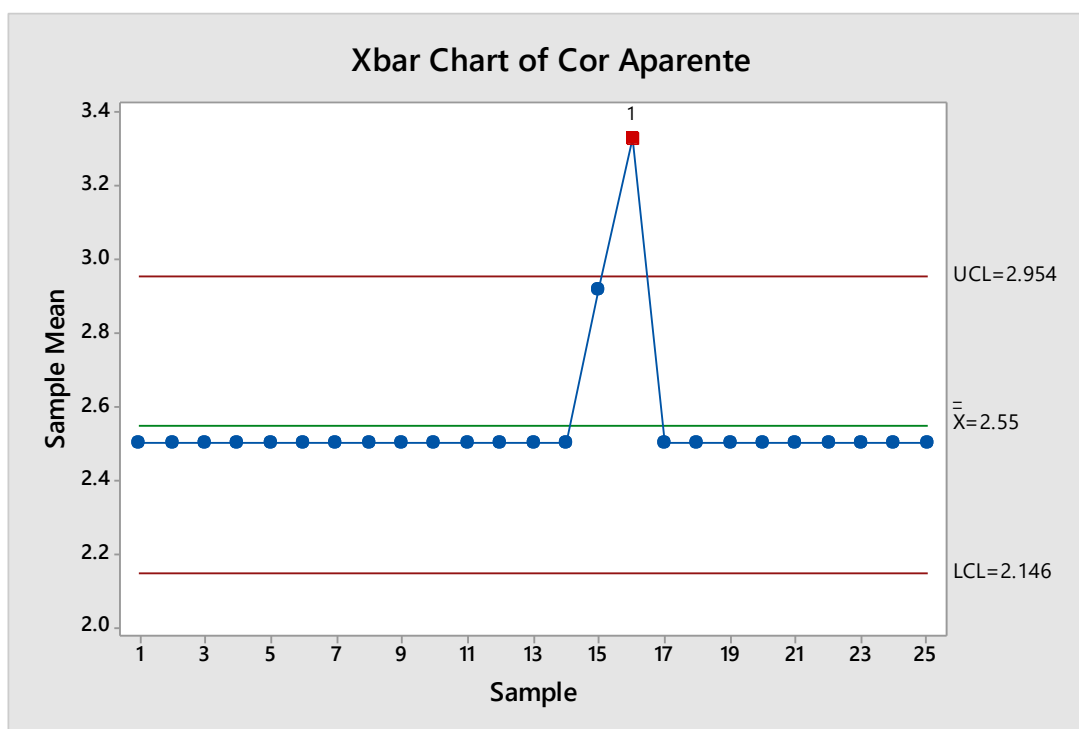


Figura 1 - Gráfico de controle para cor aparente  
**Fonte:** Os Autores (2019)

### 3.1.2 PH

O gráfico do pH representado pela Figura 2 apresenta um sistema fora de controle com quatro pontos acima do limite superior de controle e três pontos abaixo do limite inferior de controle. Apesar disso todos os valores ainda se encontram entre 6 e 9, limites colocados pela organização.

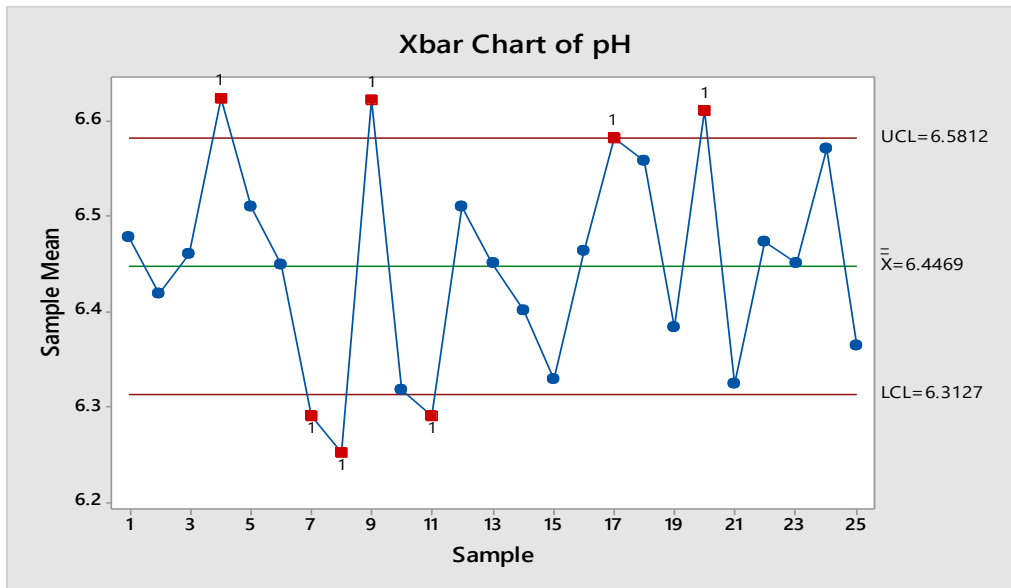


Figura 2 - Gráfico de controle para pH  
**Fonte:** Os Autores (2019)

### 3.1.3 Turbidez

O gráfico  $\bar{x}$  de turbidez representado na Figura 3 apresenta três pontos acima do limite superior de controle, só isso já seria suficiente para afirmar que o processo está fora de controle, sendo utilizadas as regras sensibilizantes apresentadas por Montgomery (2009) ainda se encontram os oito primeiros pontos seguidos abaixo da linha central. Ainda assim todas as observações se encontram dentro dos limites da empresa, não superando a 1 mg/L estabelecida.

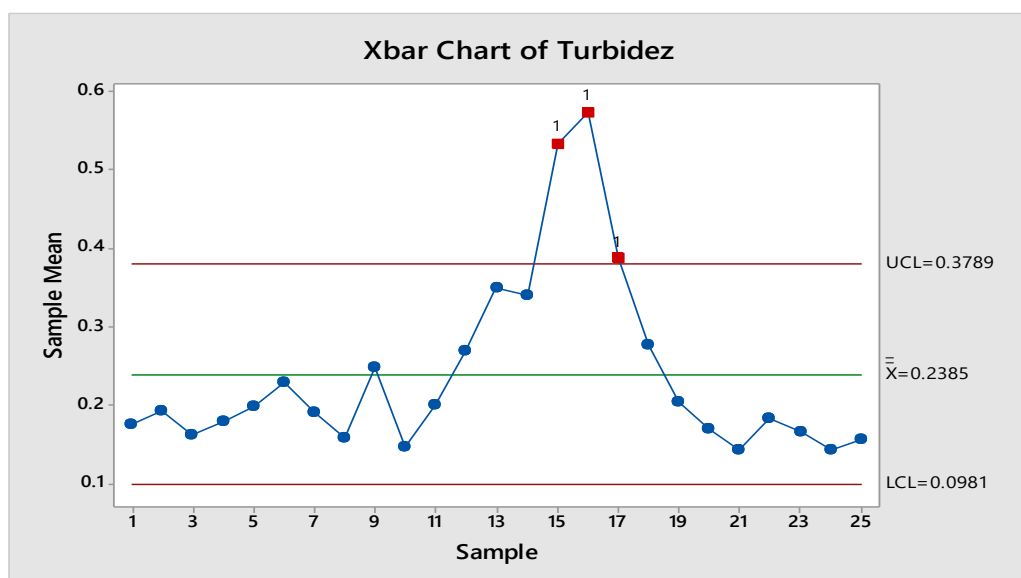


Figura 3 - Gráfico de controle para turbidez  
**Fonte:** Os Autores (2019)



### 3.1.4 Cloro Livre

O indicador de cloro livre está representado na Figura 4, apenas o ponto 13 está fora dos limites de controle estabelecidos pela estatística. A distribuição dos dados está dentro da faixa de valores aceitáveis estabelecidos pela empresa, entre 0,6 e 2,5 mg/L.

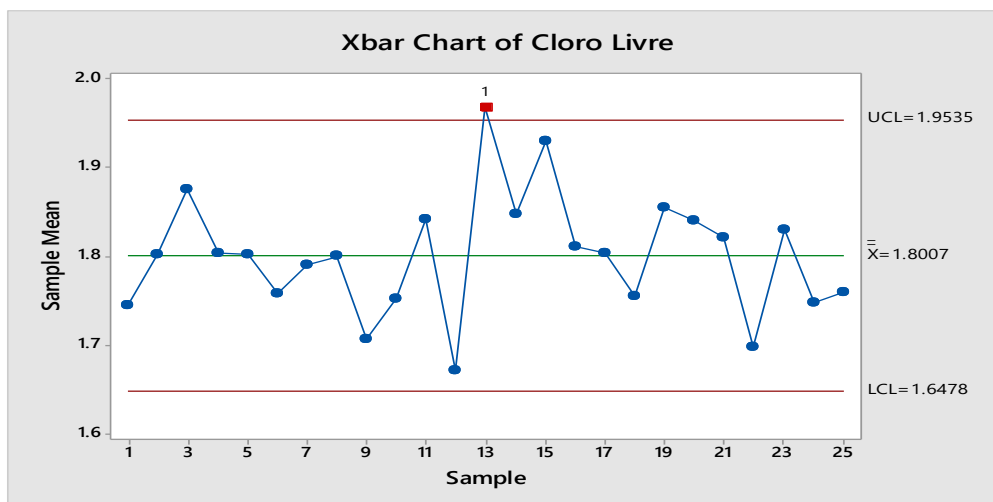


Figura 4 - Gráfico de controle para cloro livre

Fonte: Os Autores (2019)

### 3.1.5 Fluoretos

O gráfico gerado está representado na Figura 5, a variável do processo a princípio está sobre controle, os dados estão dentro dos limites de controle e mesmo aplicando as regras de sensibilização não foram encontrados pontos que indicam desvios no processo, além de todas as amostras se encontrarem dentro dos limites estabelecidos pela empresa.

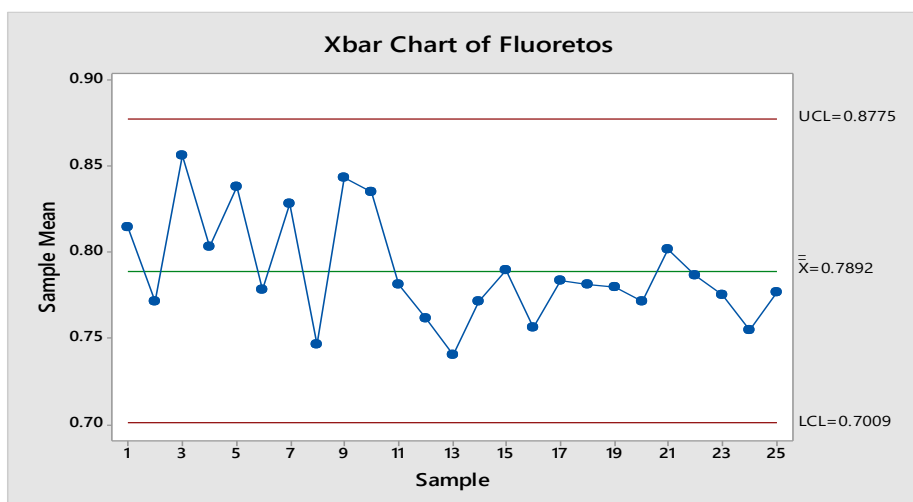


Figura 5 - Gráfico de controle para fluoretos

Fonte: Os Autores (2019)

### 3.2 Gráfico de Controle Multivariado

Como o gráfico multivariado engloba diversas variáveis é possível ilustrá-las em um único gráfico. No presente trabalho apesar da coleta inicial ter proporcionado acesso a dados de cinco variáveis, conforme explicado no item 3 foram selecionadas apenas as variáveis pH, turbidez, cloro aparente e fluoretos, pelo método de medição da cor aparente descaracterizar a utilização da ferramenta devido à sua variância nula.

O gráfico  $T^2$  de Hotelling apresentado a seguir pela Figura 6 revela que o processo está fora de controle, quase todos os subgrupos encontram-se acima da média estabelecida e 10 pontos se encontram acima do limite superior, com o valor do mais alto de 53,65 sendo a média de 3,32 e o limite superior de 16,95.

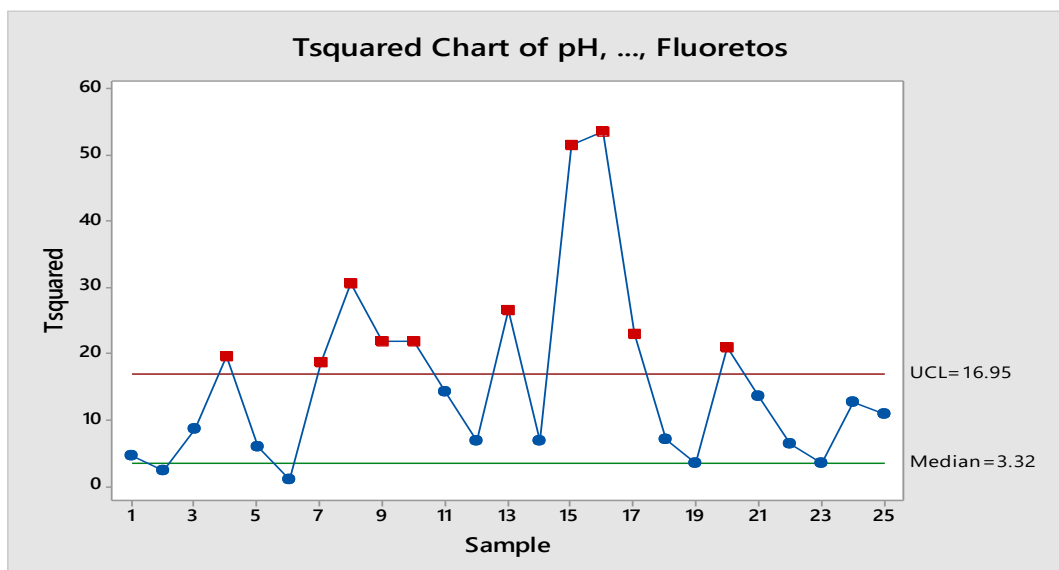


Figura 6 - Gráfico de controle multivariado  
Fonte: Os Autores (2019)

### 3.3 Comparação entre os gráficos univariados versus gráfico multivariado

Tanto os gráficos para as variáveis individuais quanto o gráfico multivariado, em geral, indicam um processo fora de controle estatístico. A Tabela 3 apresenta os pontos encontrados fora dos limites de controle de acordo com os gráficos apresentados na seção anterior para as variáveis pH, cloro livre, turbidez e fluoretos.

Tabela 3 – Subgrupos fora dos limites de controle

Subgrupo	T <sup>2</sup> de Hotelling		$\bar{x}$
	Indicadores	P-Valor	Indicadores
4	PH	0	PH
7	PH Cloro Livre	0,0001 0,0324	PH
8	PH Turbidez	0 0,0191	PH
9	PH Fluoretos	0,0004 0,0106	PH
10	PH Turbidez Cloro Livre	0,0002 0,0267 0,0041	-
11	-	-	PH
13	Turbidez Cloro Livre Fluoretos	0,0101 0 0,0193	Cloro Livre
15	Turbidez Cloro Livre	0 0,0169	Turbidez
16	Turbidez	0	Turbidez
17	PH Turbidez	0,0004 0,0005	PH Turbidez
20	PH Cloro Livre	0 0,0161	PH

**Fonte:** Os Autores (2019)

Conforme a tabela 3, pode-se observar que o pH é a característica que mais apresenta a falta de controle. O ponto 11 apresenta o distúrbio apenas no gráfico univariado de pH, isso pode ser uma indicação de alarme falso, Erro tipo I, pelo fato do gráfico multivariado ter menor incidência desse tipo de erro por analisar várias variáveis ao mesmo tempo. Já o ponto 10 apresenta possíveis problemas com três das quatro características analisadas no gráfico multivariado, enquanto nenhum dos gráficos univariados apontam problemas nesse ponto, uma possível ocorrência de Erro tipo II nos gráficos univariados. O fluoreto durante a análise do gráfico  $\bar{x}$  não apresentou nenhuma variação, no entanto, a análise multivariada aponta desvios em dois pontos. O cloro livre quando isolado apresenta apenas um ponto fora dos limites de controle, mas quando em conjunto apresenta mais quatro distúrbios. Para a utilização de gráficos de controle no

futuro seria indicado a empresa uma nova análise do processo atual. Caso a ferramenta demonstre falta de controle estatístico, como no período analisado neste trabalho, os subgrupos fora dos limites devem ser analisados e as causas raízes devem ser encontradas dentro de uma revisão do processo produtivo (MONTGOMERY, 2009). Samohyl (2009) explica que a correção de causas especiais pode ser feita através de correção direta ou uma compensação de outras variáveis.

### **Considerações finais**

O objetivo deste trabalho foi comparar o gráfico de controle univariado  $\bar{x}$  com o gráfico de controle multivariado  $T^2$  de Hotelling em um conjunto de dados do final do processo de uma estação de tratamento de água. Através de uma análise ponto a ponto dos gráficos foi verificada a falta de controle do processo por ambas as ferramentas. As limitações desse trabalho foram a distância do contato com o processo produtivo e a impossibilidade de tentar melhorá-lo até o ponto de controle para uma análise mais efetiva.

Durante a análise, a cor aparente demonstrou uma variância nula, o que descaracteriza a aplicação dos gráficos de controle e ocasionou sua exclusão da aplicação do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling. Os gráficos aplicados indicaram que os processos estão fora de controle exceto pelo gráfico  $\bar{x}$  de fluoretos. O gráfico  $T^2$  de Hotelling considera a interação entre as características analisadas indicando problemas onde os gráficos  $\bar{x}$  não conseguiriam identificar. A variação do processo mesmo fora de controle não ultrapassa a variação permitida pela empresa e pela regulamentação de potabilidade de água. Para que o processo siga o controle estatístico indica-se à empresa encontrar as causas raízes dos pontos apontados pelos gráficos e a reaplicação da ferramenta.

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se a aplicação das ferramentas também considerando as variações de desvio padrão, a utilização dos gráficos de controle nas demais etapas de tratamento de água e em outros processos produtivos, assim como outras ferramentas de gráfico de controle multivariado como o MCUSUM (*Multivariate Cumulative Sum*).

## **Referências**

- AMORIM, G. F.; BALESTRASSI, P. P.; PAIVA, A. P.; OLIVEIRA-ABANS, M. de. Detecção de mudança de nível em séries temporais não lineares usando Descritores de Hjorth. **Production**, São Paulo, v. 25, n. 4, p. 812-825, 2015.
- DI BERNARDO, L.; DANTAS, A. Di B. **Métodos e técnicas de tratamento de água**. 2ed. São Carlos: RiMa, 2005. V. 1.
- DI BERNARDO, L.; PAZ, L. P. S. **Seleção de Tecnologias de Tratamento de Água**. São Carlos: Editora LDIBE LTDA, 2008. V. I.
- FERNANDES, W. A. **O movimento da qualidade no Brasil**. INMETRO Essential Idea Publishing, 2011. Disponível em: [http://www.inmetro.gov.br/barreirastecnicas/pdf/livro\\_qualidade.pdf](http://www.inmetro.gov.br/barreirastecnicas/pdf/livro_qualidade.pdf). Acesso em: 17 mar. 2018.
- GARVIN, D. Competing on the eight dimensions of quality. **Harv. Bus. Rev.**, v. 65, n. 6, p. 101-109, 1987.
- HAIR JR. *et al.* **Análise Multivariada de Dados**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- HOWE, K. J. *et al.* **Princípios de tratamento de água**. São Paulo: Cengage, 2016.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- JURAN, J. M. **Quality planning and analysis: from product development through use**. New York: McGraw-Hill1993.
- LAZZAROTTO, E. **Obtenção de limites estatísticos de controle em gráficos de controle univariados e multivariados aplicados a dados de instrumentação de barragens**. 2016. 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- LIMA, M. B. F.; SANTOS, R. L. S.; SOUZA, E. L.; SILVA, L. B. da. Aplicações do controle estatístico multivariado da qualidade: controlando garrafeiras plásticas numa empresa industrial. **Caderno do IME – Série Estatística**, v. 31, n. 1, p. 1-14, 2012.
- MACIEL, T. H.; BRANCO, G. M.; WERNER, L. **Cartas de controle multivariadas: Estudo se caso em vinícolas italianas**. **Caderno do IME – Série Estatística**, v. 37, n. 1, p. 1-14, 2014.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- RIBEIRO, J. L. D.; TEN CATEN, C. S. **Série monográfica Qualidade: controle estatístico do processo**. Porto Alegre: FEENG/UFRGS, 2012. Disponível em: [http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/388\\_apostilacep\\_2012.pdf](http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/388_apostilacep_2012.pdf). Acesso em: 17 mar. 2018.

RICHTER, C. A. **Água:** métodos e tecnologia de tratamento. São Paulo: Blucher, 2009.

SAMOHYL, R. W. **Controle estatístico da qualidade.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

SOUZA, D. L. de. **Avaliação da efetividade de cartas de controle multivariadas na detecção de suspeitas de fraude financeira.** 2017. 99 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2017.

ZANITT, J. F.; OLIVEIRA, D. C. R. de. Análise multivariada para o controle da qualidade microbiológica do leite cru. **Caderno do IME – Série Estatística**, v. 39, n. 2, p. 35-19, 2015.